Raggiungibilità, Controllabilità, Osservabilità

→ di un sistema lineare e stazionario

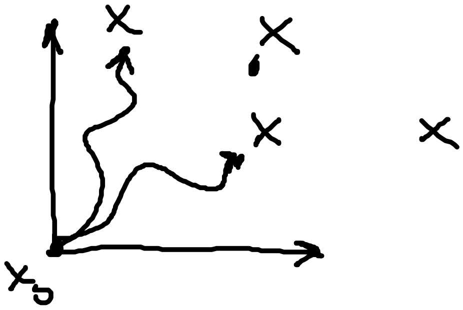
$$TC \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

u: $\underline{m}$ ingressi
x: $\underline{n}$ stato
y: $\underline{\ell}$ uscite

$$TD \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

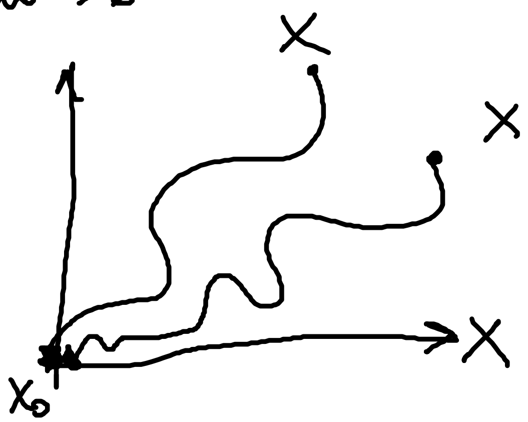
Raggiungibilità

DEF: un sistema è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE se partendo da uno stato INIZIALE x_0 è possibile raggiungere QUALSIASI stato x con una opportuna azione di controllo $u(t)$



Controllabilità

Un sistema è CONTROLLABILE se a partire da qualunque stato X esiste una opportuna azione di controllo che consenta di portare il sistema nello stato X_0



Condizioni di raggiungibilità

$x(0) = X_0$

$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0)$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)$

$\vdots$

$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} Bu(i-1)$$

deve esistere una soluzione $\forall x$

$k=n$

$$\underbrace{x(n) - A^n x_0}_{n \times 1} = \underbrace{\left[B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B\right]}_{n \times mn} \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{mn \times 1}$$

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ (R)

il sistema è RAGGIUNGIBILE se

$$\text{Rank}(\mathcal{R}) = n$$

↳ ogni stato può raggiunto in n passi

se $\text{Rank}[R] < n$ il sistema è PARZIALMENTE RAGGIUNGIBILE.

[sono raggiungibili gli stati $\in \text{Im}\{R\}$]

Controllabilità

$$x(n) - A^n x(0) = \mathcal{R} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(0) = X & \leftarrow \text{generico} \\ x(n) = x_0 & \leftarrow \text{origine} \end{cases}$$

$$x_0 - A^n X = \mathcal{R} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

il sistema è CONTROLLABILE

se $\text{Im}\{A\} \subset \text{Im}\{\mathcal{R}\}$

se il sistema è RAGGIUNGIBILE è anche CONTROLLABILE

Osservabilità

DEF: un sistema è OSSERVABILE se conoscendo $u(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$ e conoscendo $y(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$ siamo in grado di ricavare lo stato di partenza $x(t_0)$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$y(0) = Cx(0) + Du(0)$$

$$y(1) = Cx(1) + Du(1) = CAx(0) + CBu(0) + Du(1)$$

$$y(2) = Cx(2) + Du(2) = CAx(1) + CBu(1) + Du(2)$$

$$= CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Du(2)$$

$$y(k) = CA^k \underbrace{x(0)}_{ln \times 1} + \left[\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i)\right] + Du(k)$$

$ln \times n$

Sistema

$$\begin{array}{c} k=0 \\ k=1 \\ \\ k=n-1 \end{array} \begin{bmatrix} y(0) - Du(0) \\ y(1) - CBu(0) - Du(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - \left[\sum_{i=0}^{n-2} CA^{n-2-i} u(i)\right] - Du(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

MATRICE DI OSSERVABILITÀ

$(n \times 1)$

se $\text{Rank}\{\mathcal{O}\} = n$ il sistema è COMPLETAMENTE OSSERVABILE [$\exists$ una unica soluzione]

se $\text{Rank}\{\mathcal{O}\} < n$ il sistema è PARZIALMENTE OSSERVABILE

[gli stati $x \subset \text{kernel}(\mathcal{O})$ NON sono osservabili]

$$\mathcal{O}(x_{n.o} + \tilde{x}) = \mathcal{O}(\tilde{x})$$

Cambio di base degli stati

$$x = Tx'$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$T^{-1} \times \begin{cases} Tx'(k+1) = ATx'(k) + Bu(k) \\ y(k) = CTx'(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(k+1) = A'x'(k) + B'u(k) \\ y(k) = C'x'(k) + Du(k) \end{cases}$$

$A' = T^{-1}AT$

$B' = T^{-1}B$

$C' = CT$

Forma Standard di Raggiungibilità

$$T = \left[T_1 , T_2 \right] \qquad x = Tx'$$

T_1: base dello spazio raggiungibile

T_2: base dello spazio NON raggiungibile

$$x' = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{ragg} \to \\ \text{non ragg} \to \end{array} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$A_{21} = 0$, $B_2 = 0$

$$y(k) = \left[C_{11} \; C_{12} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + D u(k)$$

Forma standard di Osservabilita

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{osservabile} \\ \leftarrow \text{non osservabili} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$A_{12} = 0$

$$y(k) = \left[C_{11} \; C_{12} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + D u(k)$$

$C_{12} = 0$

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{n.o.} \quad \text{r} \\ \leftarrow \text{o.} \quad \text{r} \\ \leftarrow \text{n.o} \quad \text{n.r} \\ \leftarrow \text{o.} \quad \text{n.r} \end{array}$$

$$T = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{n.o} & \text{o.} & \text{n.o} & \text{o} \\ \text{r.} & \text{r.} & \text{n.r.} & \text{n.r.} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

■ n.r.

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + D u(k)$$