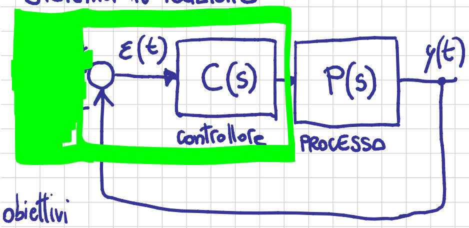
Controllo PID

Sistema in reazione



$r(t)$ valore che si vuol far assumere alla grandezza controllata

$y(t)$ valore attuale della grandezza controllata

obiettivi

i) il sistema stabile

ii) minimizzare $|\varepsilon|$ o $|\varepsilon|^2$

iii) minimizzare il tempo di risposta ed eventualmente le oscillazioni di $y(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$Y(s) = CPE = CP(R-Y)$

$Y(1+CP) = CPR$

$Y = \frac{CP}{1+CP} R$ $\qquad E =$

Controllore PID

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

Proporzionale — Integrativa — Derivativa

1) solo K_p (P)

$P(s) = \frac{A_0}{1+\tau s}$ $\qquad C(s) = K_p$

$$H = \frac{CP}{1+CP} = \frac{K_p A_0}{1 + K_p A_0 + \tau s}$$

$E = \frac{1}{1+CP} R$ $\qquad$ Es: $R(s) = \frac{1}{s}$

$$E(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1+\tau s}{1+\tau s + K_p A_0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} E(s)s = \underbrace{\frac{1}{1+K_p A_0}}_{} \text{ OFFSET}$$

2) (P) sistema con 2 poli

$P(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$ $\qquad C(s) = K_p$

$$H = \frac{CP}{1+CP} = \frac{A_0 K_p}{1 + K_p A_0 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{A_0 K_p}{1+K_p A_0}}{1 + \frac{s}{Q\omega_0(1+K_p A_0)} + \frac{s^2}{\omega_0^2(1+K_p A_0)}}$$

$\omega_f = \omega_0\sqrt{1+\quad A_0}$

$Q_f = Q\sqrt{1+\quad A_0}$

$E = \frac{1}{CP+1} R$ $\qquad R = \frac{1}{s}$ $\qquad E = \frac{1}{s}\,\frac{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}{1 + K_p A_0 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$

$\lim_{s\to 0} sE =$

3) PI

$P(s) = \frac{A_0}{1+\tau s}$ $\qquad C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$

$$H = \frac{CP}{1+CP} = \frac{A_0(K_p s + K_i)}{(1+\tau s)s + A_0(K_p s + K_i)}$$

$E = \frac{1}{CP+1} \cdot R$ $\qquad$ se $R = \frac{1}{s}$ $\qquad E = \frac{1}{s} \cdot \frac{(1+\tau s)s}{(1+\tau s)s + A_0(K_p s + K_i)}$

$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE =$

den: $K_i A_0 + s(1 + A_0 K_p) + \tau s^2 \rightarrow 1 + s\left[\frac{1+A_0K_p}{A_0 K_i}\right] + \frac{\tau}{K_i A_0} s^2$

$K_i\uparrow$ $\omega_f\uparrow$ $Q_f\uparrow$ $\qquad$ come per K_p aumentano sia ω_f si Q_f

4) PD

$P(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$ $\qquad C(s) = K_p + K_d s$

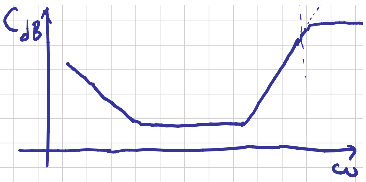
$$H = \frac{PC}{1+PC} = \frac{A_0(K_p + K_d s)}{\left(1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}\right) + A_0(K_p + K_d s)}$$

$$= \frac{A_0(K_p + K_d s)}{(1+A_0K_p) + \left[A_0K_d + \frac{1}{Q\omega_0}\right]s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{A_0}{1+A_0K_p}(K_p + K_d s)}{1 + \left[\frac{A_0 \quad + \frac{1}{Q\omega_0}}{1+A_0K_p}\right]s + \frac{s^2}{\omega_0^2(1+A_0K_p)}}$$

$K_p\uparrow$ $\omega_f\uparrow$ $Q_f\uparrow$

$K_d\uparrow$ // $Q_f\downarrow$

$$C = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + \frac{K_d s}{N}}$$



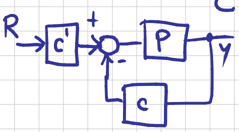
Pseudocodice per controllore PID

```
i=0
e=e_old
start:
        e= setpoint - actual_position
        i= i+e*dt
        d=(e-e_old)/dt
        output= kp*e+ki*i+kd*d
        e_old = e
        wait (dt)
goto start
```

Controllore PID industriale

$$u(s) = K_p\left[R(s) - Y(s)\right] + \frac{K_i}{s}\left[\alpha R - Y\right] + K_d s\left[\beta R - Y\right]$$

$$u(s) = \underbrace{\left[K_p + \frac{\alpha K_i}{s} + K_d \beta s\right]}_{C'} R(s) - \underbrace{\left[K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s\right]}_{C} Y(t)$$

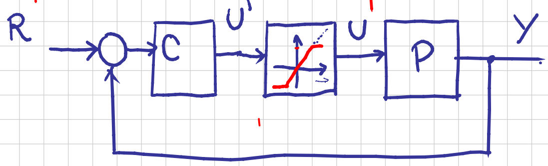


$$H = \frac{PC'}{1+PC}$$

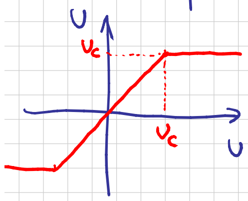
Poli come prima con α e β aggiusto gli zeri

se $\alpha \neq 1$ compare di nuovo l'offset

Problema del "wind up"



se C ha una componente Integrativa, e U' supera il fondo scala

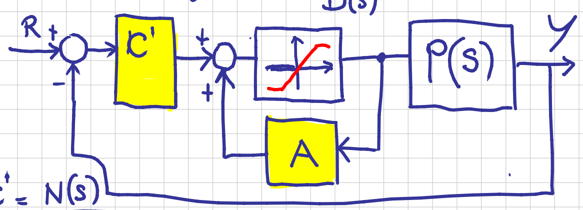


→ l'errore non si annulla

→ l'integratore si carica troppo e il sistema non risponde prontamente a variazioni di R

se C è digitale: si stacca l'integratore se $u = U_c$.

se C è analogico. $C = \frac{N(s)}{D(s)}$



$$C' = \frac{N(s)}{D'(s)}$$

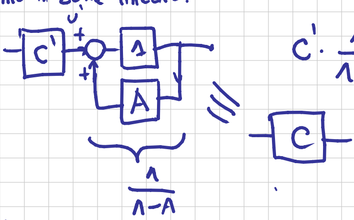
scegliamo A(s) e D'(s) in modo tale che $\begin{cases} A(s) = 1 - \frac{D}{D'} \\ \text{e } A(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{D}{D'} = 1 - A \rightarrow D' = \frac{D}{1-A}$$

$$C' = \frac{N}{D'} = \frac{N(1-A)}{D}$$

→ C' non ha più il polo nell'origine (cioè non ha l'integratore)

1) siamo in zona lineare:



$$C' \cdot \frac{1}{1-A} = \frac{N}{D} = C$$

2) in saturazione C' non ha l'integratore, quindi U' non cresce a dismisura

Metodo di Ziegler-Nichols (1941)

Hp $P(s)$ stabile, $\underline{\underline{>0}}$

Ricetta:

1. si chiude il sistema in reazione con un controllore proporzionale k_p
2. si pone un gradino in ingresso, aumentando k_p finché il sistema non oscilla
3. annotiamo k_{pc}, T_c

k_{pc}: k_p "critico"; T_c: periodo di oscillazione

→ se

P	$k_p = 0.5\,k_{pc}$		
PI	$k_p = 0.45\,k_{pc}$	$\tau_i = 0.8\,T_c$	
PID	$k_p = 0.6\,k_{pc}$,	$\tau_i = 0.5\,T_c$,	$\tau_d = 0.125\,T_c$

$$C(s) = k_p\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

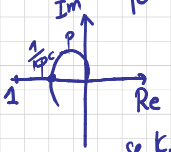
k_{pc} è [illegible]

$$H = \frac{CP}{1+CP} \xrightarrow[C = k_p]{\text{nel test}} \frac{k_p P}{1 + k_p P}$$

se $k_p = k_{pc}$ il sistema oscilla con periodo T_c $\left(\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}\right)$

↳ $1 + k_{pc} P(j\omega_c) = 0$ → $\angle P(j\omega_c) = \pi$

$|P(j\omega_c)| = 1/k_{pc}$



se $k_p = \frac{k_{pc}}{2}$ → $k_p P(j\omega_c) = \frac{1}{2}$

con $k_p = \frac{k_{pc}}{2}$ il margine di guadagno del sistema ad anello aperto è 2

$$CP = k_p\left[1 + \frac{1}{j\omega\tau_i} + j\omega\tau_d\right] P$$