Raggiungibilità, Controllabilità, Osservabilità di:

un SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

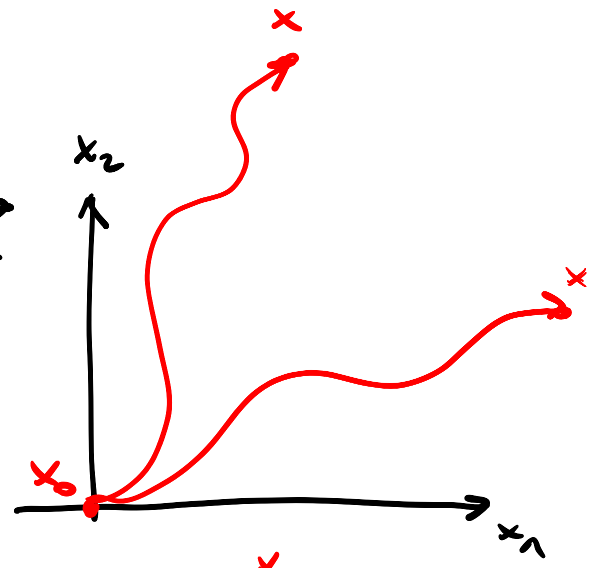
m ingressi $\vec{u}$
n stati $\vec{x}$
ℓ uscite $\vec{y}$

Tempo Continuo : $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$

Tempo Discreto : $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

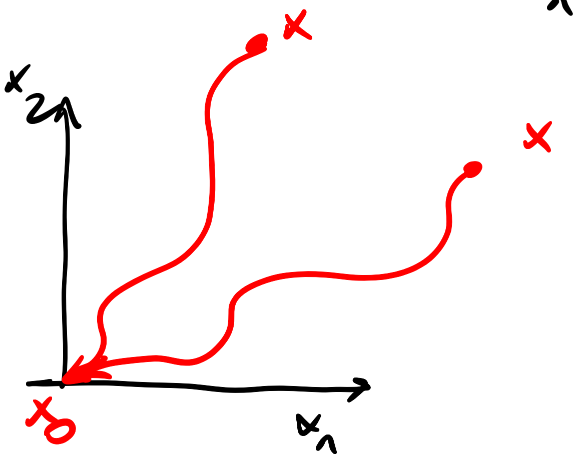
RAGGIUNGIBILITÀ

DEF. un sistema è RAGGIUNGIBILE se partendo da uno stato iniziale $\vec{x}_0$ si può raggiungere un QUALUNQUE STATO FINALE $\vec{x}$ con una OPPORTUNA AZIONE DI CONTROLLO



CONTROLLABILITÀ

DEF un sistema è CONTROLLABILE se partendo da un QUALUNQUE STATO INIZIALE $\vec{x}$ si può raggiungere lo stato $\vec{x}_0$ con una OPPORTUNA AZIONE DI CONTROLLO



Condizione di Raggiungibilità

$$x(0) = x_0$$

$$x(1) = Ax(0) + \overset{n \times m}{B} u(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

$$\vdots$$

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} B u(i-1)$$

$$\underbrace{x(n) - A^n x(0)}_{\substack{\text{Termine noto} \\ [n \times 1]}} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}}_{[n \times mn]} \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{[mn \times 1]}$$

matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$

IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE SE ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA, CIOÈ SE

$$\mathrm{Rank}(\mathcal{R}) = n$$

SE il $\mathrm{Rank}(\mathcal{R}) < n$ È RAGGIUNGIBILE SOLO IL SOTTOSPAZIO DEGLI CHE CORRISPONDE ALL'IMMAGINE DI $\mathcal{R}$ ($\mathrm{Image}(\mathcal{R})$).

CONTROLLABILITÀ

$$\left[x(n) - A^n x(0)\right] = R \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\underbrace{x_0}_{= 0} - A^n x\right] = R \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

x_0 ORIGINE

QUALUNQUE x

IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE

$$\text{Image}(A) \subset \text{Image}(R)$$

OSSERVABILITÀ

DEF. un sistema LINEARE e STAZIONARIO è OSSERVABILE se

- conoscendo $u(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$

e conoscendo $y(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$

siamo in grado di ricavare lo STATO INIZIALE $x(t_0)$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(0) = Cx(0) + Du(0)$$

$$y(1) = Cx(1) + Du(1) = CAx(0) + CBu(0) + Du(1)$$

$$y(2) = Cx(2) + Du(2) = CAx(1) + CBu(1) + Du(2)$$

$$= CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Du(2)$$

$$\vdots$$

in generale

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=1}^{k} CA^{k-i} B u(i-1) + Du(k)$$

$$\underset{(\ell n \times 1)}{\begin{bmatrix} y(0) - Du(0) \\ y(1) - CBu(0) - Du(1) \\ y(2) - CABu(1) - CBu(1) - Du(2) \\ \vdots \\ y(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} CA^{n-1-i} Bu(i-1) - Du(n-1) \end{bmatrix}} = \underset{(\ell n \times n)}{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}} \underset{(n \times 1)}{x(0)}$$

$\mathcal{O}$ MATRICE DI OSSERVABILITÀ

SE $\text{Rank}(\mathcal{O}) = n$ IL SISTEMA $\underbrace{}_{}$ DI EQUAZIONI INDICATO SOPRA HA SEMPRE SOLUZIONE

QUINDI IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

È **OSSERVABILE**

SE $\text{Rank}(\mathcal{O}) < n$ IL SISTEMA NON È OSSERVABILE

ESISTONO STATI (NEL NUCLEO DI $\mathcal{O}$) CHE NON SONO OSSERVABILI

$$\mathcal{O}(\tilde{x} + x_{no}) = \mathcal{O}(\tilde{x})$$

nel nucleo di $\mathcal{O}$)

GLI STATI NEL NUCLEO DI $\mathcal{O}$ NON HANNO EFFETTO SUL TERMINE NOTO

Cambio di base degli stati

$$x = Tx'$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \cancel{T^{-1}}\cancel{T}x'(k+1) = T^{-1}ATx'(k) + T^{-1}Bu(k) \\ y(k) = CTx'(k) + Du(k) \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x'(k+1) = A'x'(k) + B'u(k) \\ y(k) = C'x'(k) + D'u(k) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A' = T^{-1}AT \\ B' = T^{-1}B \\ C' = CT \\ D' = D \end{array}}$$

FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$T = \Big[\underbrace{T_1}_{\text{base dello spazio raggiungibile}} \ \vdots \ \underbrace{T_2}_{\text{base dello spazio NON raggiungibile}} \Big]$$

$$x = Tx' \rightarrow x' \begin{cases} x_1 & \text{r.} \\ x_2 & \text{n.r.} \end{cases}$$

$$x = T_1 x_1 + T_2 x_2$$

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}}_{x'(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{13} \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B'} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + D' u(k) \end{cases}$$

FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ

$$T = \left[\underbrace{T_1}_{\text{BASE DELLO SPAZIO OSSERVABILE}} \;\vdots\; \underbrace{T_2}_{\text{BASE DELLO SPAZIO NON OSSERVABILE}}\right]$$

$$x = T x'$$

$$x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hdashline x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{o.} \\ \\ \text{n.o.} \end{matrix}$$

$$x = \underbrace{T_1 x_1}_{\text{o}} + \underbrace{T_2 x_2}_{\text{n.o.}}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \hdashline x_2(k+1) \end{bmatrix}}^{x'} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & 0 \\ \hdashline A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \hdashline x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \hdashline x_2(k) \end{bmatrix} + D' u(k)$$

FORMA CANONICA DI KALMAN

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{n.o.} & \text{o.} & \text{n.o.} & \text{o.} \\ \text{r.} & \text{r.} & \text{n.r.} & \text{n.r} \end{array}$$

$$x = T x'$$

$$x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{n.o. r.} \\ \leftarrow \text{o. r.} \\ \leftarrow \text{n.o. n.r.} \\ \leftarrow \text{o. n.r.} \end{array}$$

$$x = T_1 x_1 + T_2 x_2 + T_3 x_3 + T_4 x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{C'} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + D' u(k)$$