Raggiungibilità, Osservabilità, Controllabilità

Wednesday, 17 May 2017 09:38

in un sistema lineare e stazionario

TC
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\vec{x}$: n stati
$\vec{u}$: m ingressi
$\vec{y}$: l uscite

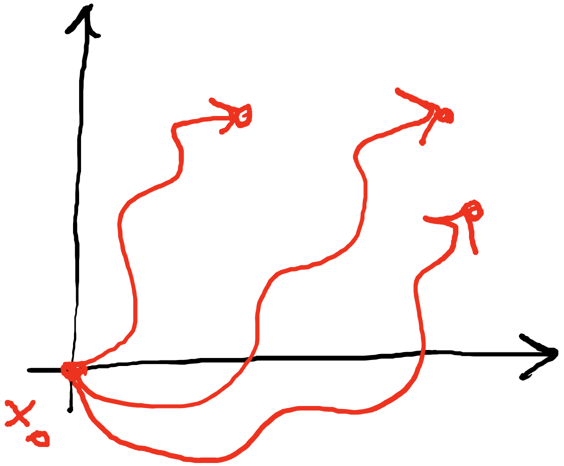
↕

TD:
$$\begin{cases} x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases}$$

RAGGIUNGIBILITÀ

Wednesday, 17 May 2017 09:44

DEF. Un sistema è raggiungibile se a partire da un qualunque stato iniziale $\underline{x_0}$ posso raggiungere qualunque stato finale x con una opportuna azione di controllo



Wednesday, 17 May 2017 09:47

$$x(0) = x_0$$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

$$\vdots$$

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} B u(i-1)$$

$$\underbrace{x(n) - A^n x(0)}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{n \times mn} \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{mn \times 1}$$

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

(R)

il sistema è RAGGIUNGIBILE solo se il $\boxed{\operatorname{rank}(R) = n}$

Wednesday, 17 May 2017 09:57

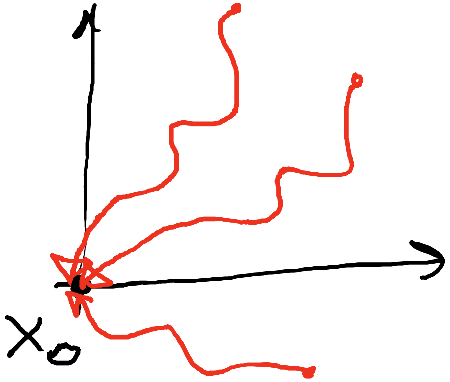
Se RANK $[\mathcal{R}] < n$ SONO RAGGIUNGIBILI SOLO GLI STATI $\in$ Image $[\mathcal{R}]$

[PARZIALMENTE RAGGIUNGIBILE]

CONTROLLABILITÀ

Wednesday, 17 May 2017 10:01

DEF: UN SISTEMA È <u>CONTROLLABILE</u> SE, A PARTIRE A DA UNO STATO INIZIALE QUALUNQUE x_{iniz} IL SISTEMA PUÒ ESSERE PORTATO NELLO STATO DI RIPOSO x_0 CON UNA OPPORTUNA AZIONE DI CONTROLLO



$$x_0 = x(n)$$

$$x_{iniz} = x(0)$$

$$x_0 - A^n x_{iniz} = R \cdot \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

IL SISTEMA È <u>CONTROLLABILE</u> se

$A^n x_{iniz} \in Image(R)$ quindi se $Image(A) \subset Image(R)$

OSSERVABILITÀ

Wednesday, 17 May 2017 10:09

DEF: UN SISTEMA È OSSERVABILE se

- conoscendo $u(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$
- conoscendo $y(t)$ da $t=t_0$ a $t=t_f$

sono in grado di DETERMINARE lo stato iniziale $x(t_0)$

$$y(0) = C\overset{\downarrow}{x(0)} + Du(0)$$

$$y(1) = Cx(1) + Du(1) = CAx(0) + CBu(0) + Du(1)$$

$$y(2) = Cx(2) + Du(2) = CAx(1) + CBu(1) + Du(2)$$

$$= CA^2 \underset{\uparrow}{x(0)} + \underbrace{CABu(0) + CBu(1)} + Du(2)$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = CA^{n-1}x(0) + \sum_{i=1}^{n-1} CA^{n-i}Bu(i-1) + Du(n-1)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) - Du(0) \\ y(1) - CBu(0) - Du(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} CA^{n-i-1}Bu(i-1) - Du(n-1) \end{bmatrix}}_{n\ell \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{n\ell \times n} \left. x(0) \right\} n \times 1$$

$\leftarrow \mathcal{O}$ matrice di osservabilità

Wednesday, 17 May 2017 10:30

Wednesday, 17 May 2017 10:28

Se RANK$(\mathcal{O}) = n$

IL SISTEMA HA SOLUZIONE UNICA

↳ È OSSERVABILE

Se RANK$(\mathcal{O}) < n$

IL SISTEMA NON È OSSERVABILE

(PARZIALMENTE OSSERVABILE)

[gli stati $\in \ker(\mathcal{O})$ NON SONO OSSERVABILI]

$$y(x_{ker}) = 0 \qquad y(\underset{\uparrow}{x_{ker}} + \bar{x}) = y(\bar{x})$$

Cambio di base degli stati

Monday, 22 May 2017 13:49

$$x = T x' \qquad x' = T^{-1} x$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(k+1) = T^{-1} A T x'(k) + T^{-1} B u(k) \\ y(k) = C T x'(k) + D u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(k+1) = A' x'(k) + B' u(k) \\ y(k) = C' x'(k) + D' u(k) \end{cases}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$B' = T^{-1} B$$

$$C' = C T$$

$$D' = D$$

Forma 'standard' base di raggiungibilità

Monday, 22 May 2017 14:00

$$T = \left[\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base del} \\ \text{sottospazio} \\ \text{raggiungibile}}}{T_1} \;\vdots\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{dello} \\ \text{spazio} \\ \text{NON} \\ \text{RAGGIU}}}{T_2} \,\right]$$

$$x = Tx'$$

$$x' = \begin{cases} x_1 & \leftarrow \text{RAGGIUNG} \\ x_2 & \leftarrow \text{NON SONO RAGGIUNG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline \overset{0}{A_{21}} & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \overset{0}{B_2} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{c:c} C_1 & C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + D\,u(k) \end{cases}$$

Forma base o "standard" di osservabilità

Monday, 22 May 2017 14:07

$$T = \left[\underset{\uparrow}{T_1} \;\vdots\; \underset{\nwarrow}{T_2} \right] \qquad x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hdashline x_2 \end{bmatrix}$$

base dello spazio osservabile

base dello spazio n. oss.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \hdashline x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & \overset{0 \swarrow}{\boxed{A_{12}}} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \left[C_1 \;\vdots\; \underset{\underset{0}{\Uparrow}}{C_2} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \hdashline x_2(k) \end{bmatrix} + D u(k)$$

Forma canonica di Kalman

Monday, 22 May 2017 14:12

$$T = \left[\begin{array}{c:c:c:c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n.o & o. & n.o & o. \\ r. & r. & n.r & n.r \end{array}\right]$$

$$x' = \begin{array}{c c c} \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hdashline x_2 \\ \hdashline x_3 \\ \hdashline x_4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cc} n.o. & r. \\ o. & r. \\ n.o & n.r \\ o. & n.r. \end{array} \end{array}$$

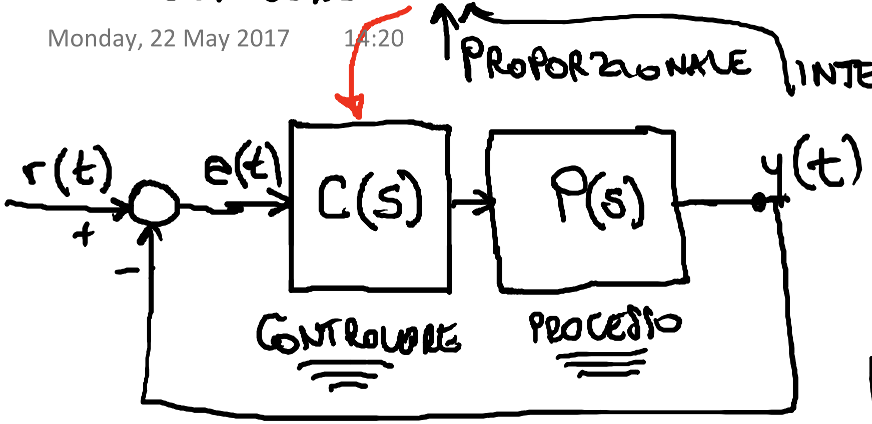
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \hdashline 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ \hdashline 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] u(k)$$

$$y(k) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + Du(k)$$

Controllo PID ← DERIVATIVO

↑ PROPORZIONALE | INTEGRATIVO

Monday, 22 May 2017 14:20



$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$Y = CPE = CP(R-Y)$$

$$[1+CP]Y = CPR$$

$$Y = [1+CP]^{-1} CP\, R$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{CP}{1+CP}$$

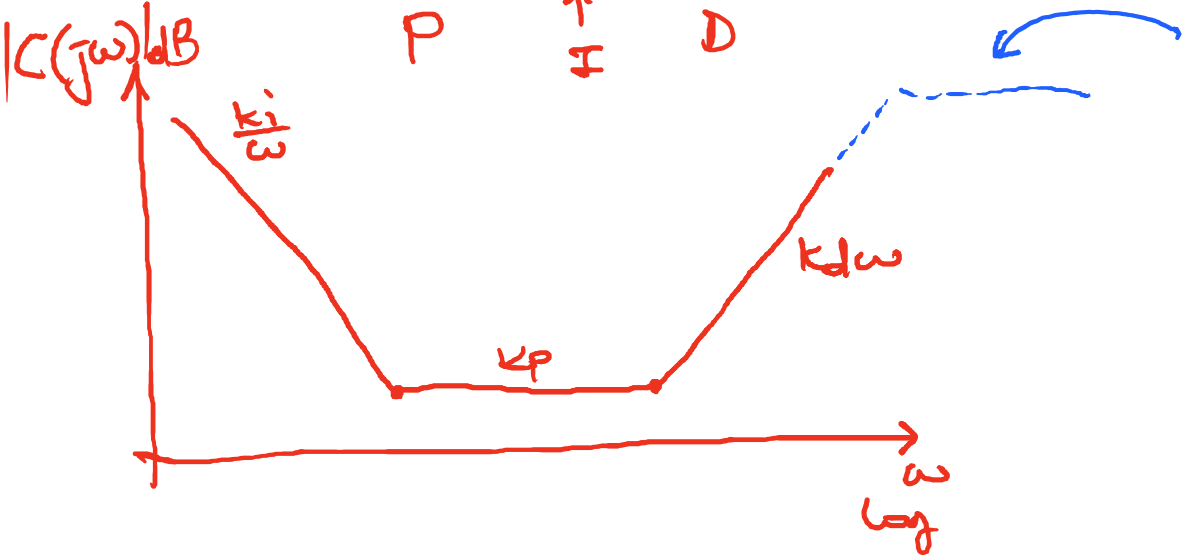
OBIETTIVI del CONTROLLO

ES.
- MINIMIZZARE $|e|$, $|e^2|$ se 1 dimensione
- SISTEMA STABILE
- MINIMIZZARE il TEMPO DI RISPOSTA

Controllore PID

Monday, 22 May 2017 14:26

$$C(s) = \underset{\overset{\uparrow}{P}}{K_p} + \underset{\overset{\uparrow}{I}}{\frac{K_i}{s}} + \underset{\overset{\uparrow}{D}}{K_d s} = K_p\left[1 + \frac{1}{s\tau_i} + \tau_d s\right]$$



$$\frac{\tau_d s}{1+\tau^* s}$$

(nella realtà

Risposta al gradino

Monday, 22 May 2017 14:30

$$R = \frac{1}{s} \qquad E = \frac{R}{1+CP}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)P(s)} =$$

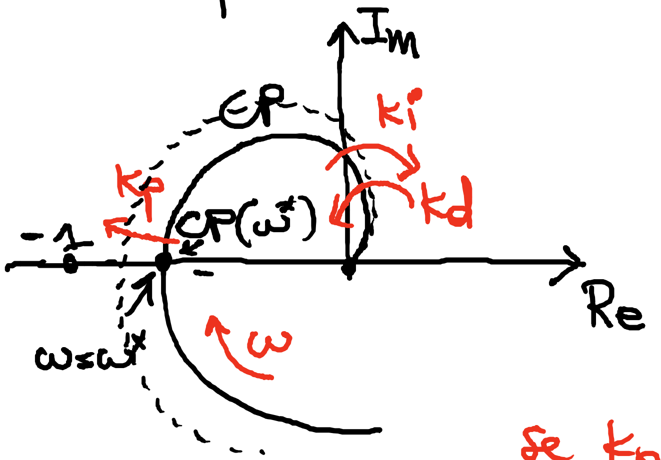
- se C ha componente integrativa $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$
- se C <u>NON</u> ha componente integrativa

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+k_p P(0)} \leftarrow \underline{\text{OFFSET}}$$

Effetto sulla stabilità

Monday, 22 May 2017 14:36

P passabasso



$$C = K_p\left[1 + \frac{1}{s\tau_i} + s\tau_d\right]$$

$$\omega^* : \angle CP(\omega^*) = \pi$$

MARGINE DI GUADAGNO

$$GM = \frac{1}{|CP(\omega^*)|}$$

se $K_p \uparrow$ GM ↓

se $K_i = \frac{K_p}{\tau_i} \uparrow$ GM ↓ (rotazione oraria)

se $K_d \uparrow$ GM ↑ (rotazione antioraria)

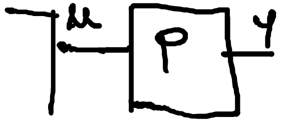
PSEUDOCODICE

Monday, 22 May 2017 14:45

```
i=0
e_old=0
forever do
        e = setpoint - actualposition
        i = i + e*dt
        d = (e - e_old)/dt
        u = Kp*e + Ki*i + Kd*d
        e_old = e
        wait(dt)
end do
```

PID industriale

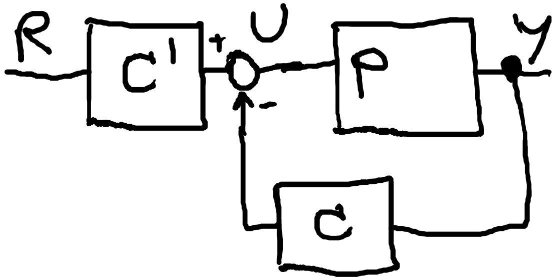
Monday, 22 May 2017 14:49



2 PARAMETRI IN PIÙ

$$u(s) = K_p\left[R-Y\right] + \frac{K_i}{s}\left[\alpha R - Y\right] + K_d s\left[\beta R - Y\right]$$

$$u(s) = \underbrace{\left[K_p + \frac{K_i \alpha}{s} + K_d \beta s\right]}_{C'} R - \underbrace{\left[K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s\right]}_{C} Y$$



$$\frac{Y}{R} = \frac{\overbrace{C'P}^{\text{determina gli ZERI}}}{\underbrace{1+CP}_{\text{determina i POLI}}}$$

Metodo di Ziegler-Nichols (41)

Monday, 22 May 2017 14:57

- **CICLO CHIUSO**

Hp $P(s)$ STABILE $P(0)>0$

1) SI CHIUDE IL SISTEMA IN REAZIONE CON C PROPORZIONALE e si AUMENTA k_p FINCHÉ IL SISTEMA NON COMINCIA A OSCILLARE

2) PRENDO NOTA DI $k_p = k_{pC}$, T_C [PERIODO DI OSCILLAZ.]

3) P: $k_p = 0{,}5\, k_{pC}$

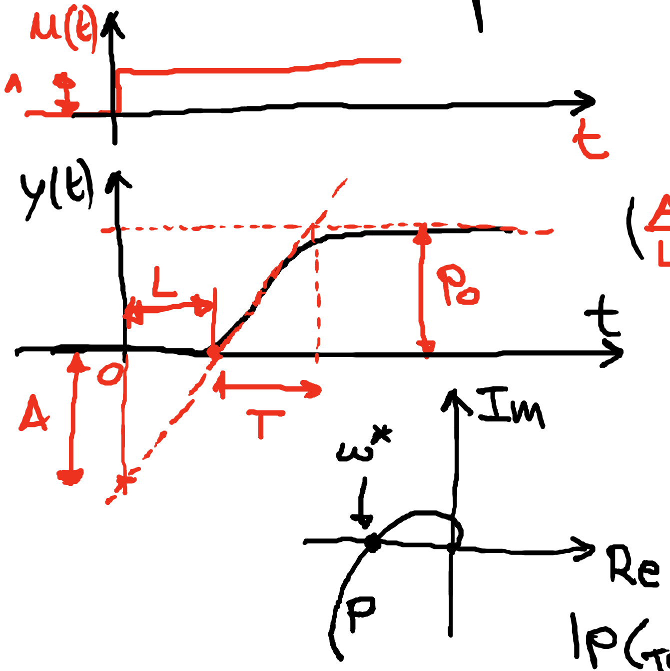
PI: $k_p = 0{,}45\, k_{pC}$ $\tau_i = 0.8\, T_c$

PID: $k_p = 0.6\, k_{pC}$ $\tau_i = 0.5\, T_c$ $\tau_d = 0{,}125\, T_c$

Metodo Ziegler-Nichols a CICLO APERTO

Monday, 22 May 2017 15:06

1) si misura la risposta al gradino di P



$$\left(\frac{A}{L} = \frac{P_0}{T}\right)$$

$$P(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T} P_0$$

tipicamente $\omega^* T \gg 1$

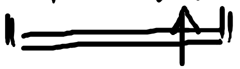
$$P(j\omega^*) = \frac{e^{-j\omega^* L}}{j\omega^* T} P_0$$

$$\angle P(j\omega^*) = \pi \Rightarrow \omega^* L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega^* = \frac{\pi}{2L}$$

$$|P(j\omega^*)| = \frac{P_0 \, 2L}{\pi T} = \left(\frac{2A}{\pi}\right)$$

Monday, 22 May 2017 15:17

P: $k_p = \frac{1}{A}$ $\qquad GM \triangleq \overline{\widehat{CP(\omega^*)}} = \left[\frac{1}{A}\cdot\frac{2A}{\pi}\right]^{-1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} > 1$

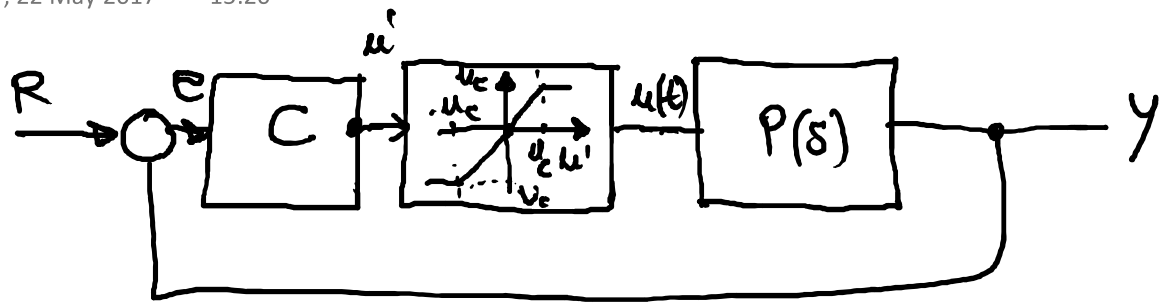


PI: $k_p = \frac{0,9}{A}$ $\qquad \tau_i = 3L$

PID: $k_p = \frac{1.2}{A}$ $\qquad \tau_i = 2L$ $\qquad \tau_d = L/2$

PROBLEMA del WIND UP

Monday, 22 May 2017 15:20



↳ BISOGNA INIBIRE L'INTEGRATORE se $u > u_c$ o $u < -u_c$.

Monday, 22 May 2017 15:38